

Exemplo: pêndulo simples

$$E = H = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cos\theta \rightarrow p_\theta^\pm = \pm \sqrt{2m\ell^2 E + 2m^2\ell^3 g \cos\theta}$$

notar
sinal!

para $E < mg\ell$:

$$\oint p_\theta d\theta = \int_{-\theta_m}^{\theta_m} p_\theta^+ d\theta + \int_{\theta_m}^{-\theta_m} p_\theta^- d\theta = 2 \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \sqrt{A + B \cos\theta} d\theta$$

$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{-E}{mg\ell}\right)$

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_m} \sqrt{A + B \cos\theta} d\theta \quad ; \quad A = 2m\ell^2 E \quad ; \quad B = 2m^2\ell^3 g$$

simetria do $\cos$.

A integral ^{indefinita} é uma integral elíptica [Mathematica]: $2\sqrt{a+b} E\left(\frac{\theta}{2} \middle| \frac{2b}{a+b}\right) + \text{constant}$

Não é energia, é o nome dessa função especial

Não parece ser simples inverter p/ obter $E = H$ em função de J ... Podemos citar isso com alguns truques:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{\partial E}{\partial J} \right)^{-1} \stackrel{\text{válido devido a haver apenas um } J}{=} 2\pi \frac{\partial J}{\partial E} = 2\pi \frac{\partial}{\partial E} \int_0^{\theta_m} \sqrt{\underbrace{A}_{2m\ell^2 E} + B \cos\theta} d\theta$$

$$= 4 \left[\int_0^{\theta_m} \frac{\partial}{\partial E} (\sqrt{A + B \cos\theta}) d\theta + \sqrt{A + B \cos\theta_m} \cdot \frac{d\theta_m}{dE} \right]$$

onde usamos a identidade

$$\left[\frac{d}{dE} \int_0^{f(E)} g(E, x) dx = \int_0^{f(E)} \frac{\partial g(E, x)}{\partial E} dx + g(E, f(E)) f'(E) \right] \quad \begin{matrix} \text{v. próx.} \\ \text{p.á.} \end{matrix}$$

Dem. semi-rigorosa da expressão p/ $\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{f(E)} g(E, x) dx$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E} \int_0^{f(E)} g(E, x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left(\int_0^{f(E+a)} g(E+a, x) dx - \int_0^{f(E)} g(E, x) dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left(\int_0^{f(E+a)} g(E+a, x) dx - \int_0^{f(E)} g(E+a, x) dx + \int_0^{f(E)} g(E+a, x) dx - \int_0^{f(E)} g(E, x) dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_{f(E)}^{f(E+a)} \frac{g(E+a, x)}{a} dx \right] + \int_0^{f(E)} \frac{\partial g(E, x)}{\partial E} dx \end{aligned}$$

Agora, p/ a pequeno, a função $g(E+a, x)$ tem um valor praticamente constante no intervalo de $f(E)$ a $f(E+a)$, igual a $g(E, f(E))$. Podemos então tirá-lo da integral, obtendo

$$g(E, f(E)) \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(E+a) - f(E)}{a} = g(E, f(E)) f'(E)$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{f(E)} g(E, x) dx = g(E, f(E)) f'(E) + \int_0^{f(E)} \frac{\partial g(E, x)}{\partial E} dx}$$

Ex: considere o caso em que $g(E, x) = g(E)$ é indep. de x . Então

$$\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{f(E)} g(E) dx = \frac{\partial}{\partial E} [g(E) f(E)] = g'(E) f(E) + g(E) f'(E)$$

$$= \boxed{\frac{4 \cdot 2 m l^2}{2} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{A + B \cos \theta}}} + \cancel{\sqrt{2 m l^2 (E + m g l \cdot \left(\frac{-E}{m g l} \right))} \cdot \frac{d\theta_m}{dE}} \quad \rightarrow \text{desnecessário calcular}$$

$$\text{def: } G \equiv \frac{1}{m l^2} ; \quad F \equiv m l g ; \quad k \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{F} \right)} \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{E + F} = \sqrt{2 F} k$$

$$\tau = \frac{4}{G} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{G} \sqrt{E + F(1 - 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})})}} = 2 \sqrt{\frac{2}{G}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E + F}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \underbrace{\frac{2F}{E+F} \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{1/k^2}}} = \frac{2}{\sqrt{FG}} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{[1 - \sin^2 u]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{2}{k} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\cos u}$$

$$\text{Mudando de variável: } \sin u = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \cos u \, du = \frac{1}{2k} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{2k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, d\theta$$

$$\text{Ainda: } \sin \frac{\theta_m}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_m}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{F} \right)} = k \Rightarrow \sin u_m = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta_m}{2} = \frac{k}{k} = 1 \rightarrow \boxed{u_m = \frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{2}{k} \cdot 2k \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{\cos u} \, du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \cdot \cancel{\cos u}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

$$\therefore \tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\theta_m}{2}\right),$$

ref: notas de aula de
D. Finley, UNM

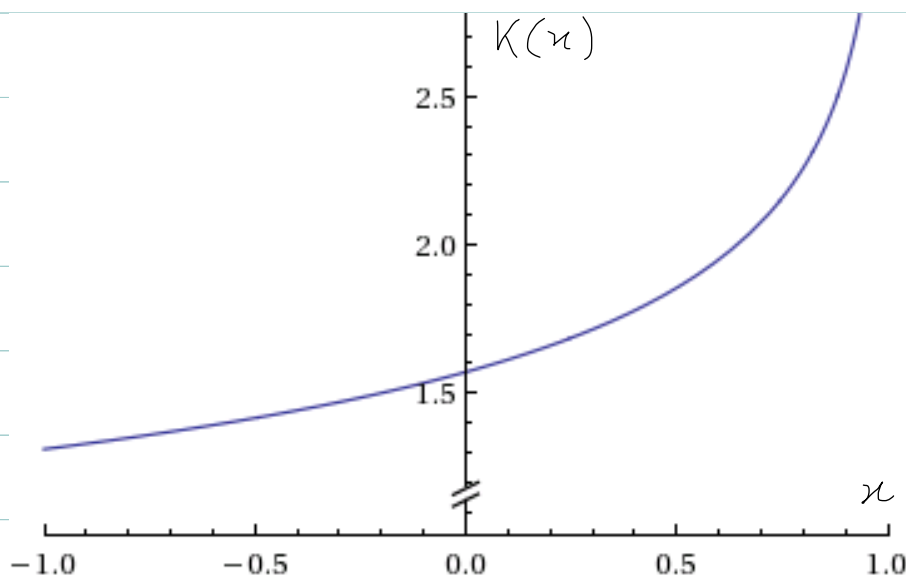
$$\text{onde } K(x) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 u}} \text{ e' uma integral elíptica de 1º tipo. } (= F(\frac{\pi}{2}, x)) \quad \text{completa}$$

checando limites conhecidos

$$p/\theta_m \rightarrow 0 \quad K(0) = \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{período no limite harmônico})$$

do pêndulo - OK!

$$p/\theta_m \rightarrow \pi : K \rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos u} = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/2} \rightarrow \infty$$



obs: p/x pequeno
pode-se mostrar que

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{x^2}{4} + 3\left(\frac{x^4}{64}\right) + \dots \right]$$

WolframAlpha

$$\therefore \tau \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \theta_m}{2} \right) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos \theta_m}{2} \right) \right)$$

$$\boxed{\tau \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(g + \frac{E}{mgl} \right)} \quad \text{em 1ª ordem em } \theta_m$$

p $E > mgl$: $J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{A + B \cos \theta} d\theta$; A, B como acima

Podemos seguir de forma análoga ao desenvolvimento anterior até chegar a

$$\tau = \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{g} \sqrt{E + F(1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2}))}}} = \frac{1}{\sqrt{FG}} \cdot \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left[1 - \frac{1}{k^2} \sin^2(\frac{\theta}{2})\right]^{1/2}}$$

Agora, porém, $k > 1$.

pela simetria de que $\sin(\frac{\theta}{2}) = \sin(\pi - \frac{\theta}{2})$, e ainda tomando agora $u \equiv \frac{\theta}{2}$

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta/2}{k}\right)^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 u}}$$

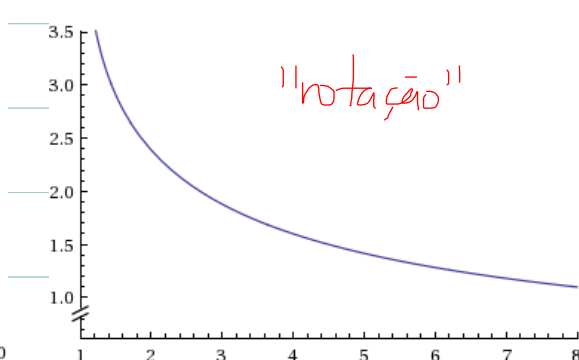
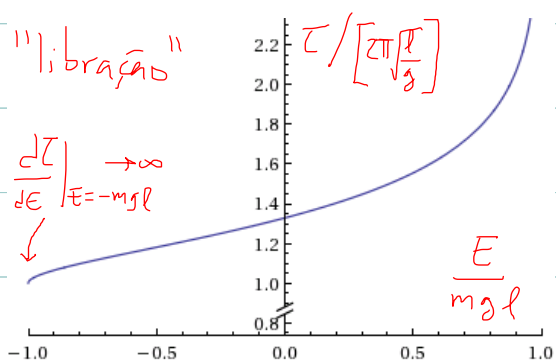
$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{2}{k} K\left(\frac{1}{k}\right) ; k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{mgl}\right)}$$

checando: p/ $E \gg mgl \rightarrow k \gg 1 \rightarrow K\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \tau \rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{2mgl}{E}}} \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{2ml^2}{E}} \cdot \pi$

$$\therefore \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 = \frac{2ml^2}{E} \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2}$$

(praticamente toda a energia é cinética de rotação $\rightarrow 04$)

p/ $E \rightarrow mgl$ $k \rightarrow 1$, novamente $\tau \rightarrow \infty$ [lim. corresponde ao eq. instável em $\theta = \pi$] (OK)



(normalizados)
p/ E acima e
abaixo do valor
limite mgl
[notar eixos]

Obs: para problemas 1-dimensionais, como o pêndulo simples, é também possível encontrar o período por métodos mais elementares

p/ H da forma $\frac{p^2}{2m} + V(x) = E$, com $p = m\dot{x}$:

$$m \frac{dx}{dt} = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

no caso de "librações"

Considerando que o movim. se dá entre $x_{\min}$ e $x_{\max}$ e que, pela simetria de reversão temporal, o tempo de ida é igual ao de volta, então o período fica

$$T = 2 \int_{t(x_{\min})}^{t(x_{\max})} dt = 2m \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - V(x))}} = \sqrt{2m} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Para o pêndulo, usando coordenada θ , temos $\frac{p^2}{2ml^2} + V(\theta) = E \rightarrow$ as eqs. acima valem se

substituímos $V(x) \rightarrow l^2 V(\theta) = -mgl \cos \theta$, $E \rightarrow l^2 E$, $x_{\max} = -x_{\min} = l \theta_m$

Temos então que a libração tem período

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{l^2 E + l^3 mg \cos \theta}} = \frac{4m}{l} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{A + B \cos \theta}} \quad \text{como obtivemos antes!}$$

Da mesma forma, o caso de "rotações" corresponde ao movimento num potencial $V(x)$ espacialmente periódico, i.e. $V(x+L) = V(x)$. O período temporal (para que $x, p \rightarrow x+L, p$)

é então

$$\tau = \int_{t(x_0)}^{t(x_0+L)} dt = 2m \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx}{\sqrt{2m(E-V(x))}}$$

para o pêndulo, novamente fazendo as substituições apropriadas e ainda $L = 2\pi l$, $x_0 = 0$,

temos então

$$\tau = 2m \int_0^{2\pi l} \frac{dx}{\sqrt{A+B\cos\theta}} = 2ml \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{A+B\cos\theta}}$$

Exemplo: problema de Kepler $V(r) = -\frac{k}{r}$

Retornando ao exemplo feito anteriormente p/ potenciais $a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}$, com $a(r) = -\frac{k}{r}$, $b(\theta) = 0$: vimos que nesse caso W é de fato separável, com

$$p_\psi = \frac{dW}{d\psi} = \alpha_\psi = \text{cte}; \quad p_r = \frac{dW_r}{dr} = \sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{k}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}; \quad p_\theta = \frac{dW_\theta}{d\theta} = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta}}$$

As variáveis de ação são:

$$J_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\psi d\psi = \boxed{\alpha_\psi} \rightarrow \text{coord cíclica é um caso-limite de órbitas tipo rotação, no qual o gráfico } p_\psi(\psi) \text{ é uma reta}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta}} d\theta \quad [\text{órbita tipo rotação}]$$

$$\text{onde } \theta_{\min}, \theta_{\max} \text{ obtidos qdo } p_\theta = 0 \rightarrow \alpha_2^2 = \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta} \rightarrow \sin\theta = \pm \frac{\alpha_\psi}{\alpha_2}$$

$$\text{calculando a integral [v. lim] : } \boxed{J_\theta = \alpha_2 - \alpha_\psi}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{k}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr \rightarrow \text{Essas órbitas podem ser do tipo rotação apenas se } \alpha_1 < 0 \text{ } (\alpha_1 = -E, E > 0)$$

$$\text{limites dados por } p_r = 0 \rightarrow Er^2 - kr + \frac{\alpha_2^2}{2m} = 0 \rightarrow r = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2E\alpha_2^2}}{2E} \quad \left[\begin{array}{l} \text{se } E < 0, \text{ um} \\ \text{dos valores se} \\ \text{torna } < 0! \end{array} \right]$$

$$\text{calculando: } \boxed{J_r = -\alpha_\theta + \left(-\frac{2m}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{2}} \Rightarrow J_r + J_\theta + J_\psi = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

Invertendo:

$$E = - \frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

$$\text{freqs. fundamentais: } \omega_r = \frac{\partial E}{\partial J_r} = \frac{mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3} = \left(\frac{-2E}{mk^2} \right)^{3/2} \cdot mk^2 = \left(\frac{-8E^3}{mk^2} \right)^{1/2}$$

$$\omega_\theta = \omega_\varphi = \omega_r \quad [\text{degenerescência completa}]$$

- notar que $\omega_\theta, \omega_\varphi$ iguais p/ qq problema de fse central

obs: portanto esse sistema só está na categoria "multiperódico" p/ órbitas
com $E < 0$